

文章编号: 1674—8247(2022)06—0030—06

DOI: 10.12098/j.issn.1674-8247.2022.06.006

# 铁路既有曲线混合约束非线性最优化整正研究

马敬武<sup>1</sup> 谢建明<sup>2</sup> 王伟<sup>1</sup> 谢红太<sup>1</sup>

(1. 华设设计集团股份有限公司, 南京 210014; 2. 四川大学, 成都 610065)

**摘要:** 本文针对既有铁路曲线整正后无缝线路锁定轨温变化给维修作业带来的不便, 将轨道长度不变作为一种约束条件, 考虑半径和缓和曲线长度在允许范围内取整要求, 并结合各控制点拨道量限制条件, 提出基于混合约束最优化模型计算曲线整正的方法。首先由曲率图对铁路线形概略分段, 选取圆曲线段测点坐标, 然后利用几何重心法计算曲线初始几何要素, 最后以拨道量的平方和最小为目标函数, 建立混合约束的非线性最优化模型; 利用计算机语言 Python 自主编程计算兰新线某段拨道量值, 并与传统拨道量计算值进行比较。研究表明: (1) 可将轨道几何长度不变作为约束条件, 且满足半径和缓和曲线长度取整的要求; (2) 测点拨道量平方和和绝对值均比传统拨道量计算值好; (3) 该模型能够满足客货共线、重载铁路以及铁路大提速既有曲线整正。

**关键词:** 曲率; 曲线整正; 混合线性约束; 拨道量

中图分类号: U216.3

文献标识码: A

30

## Study on Nonlinear Optimization Correction of Existing Railway Curves with Mixed Constraints

MA Jingwu<sup>1</sup> XIE Jianming<sup>2</sup> WANG Wei<sup>1</sup> XIE Hongtai<sup>1</sup>

(1. China Design Group Co., Ltd., Nanjing 210014, China;

2. Sichuan University, Chengdu 610065, China)

**Abstract:** In view of the maintenance inconvenience caused by the change of fastening-down rail temperature of CWR track after curve correction of existing railway, this paper proposes a method to calculate curve correction based on the mixed constraint optimization model by taking the unchange of track length as a constraint condition, taking into consideration the requirement for rounding off the radius and transition curve length within the allowable range, and considering the limiting conditions for track lining amount at each control point. First, we roughly segmented the railway alignment according to the curvature diagram, selected the coordinates of the measuring points in the circular curve segment, then calculated the initial geometric elements of the curve by the geometric center-of-gravity method, and finally established a nonlinear optimization model with mixed constraints by taking the minimum sum of squares of the track lining amount as the objective function. Then, we used the computer language Python self-programming to calculate the track lining amount of a section of Lanzhou-Urumqi High-speed Railway and compared it with the calculated traditional track lining amount. The results show that: (1) The unchange of geometric track length can be used as a constraint, and the requirement for rounding off the

收稿日期: 2022-03-20

作者简介: 马敬武(1990-), 男, 助理工程师。

引文格式: 马敬武, 谢建明, 王伟, 等. 铁路既有曲线混合约束非线性最优化整正研究[J]. 高速铁路技术, 2022, 13(6): 30-35.

MA Jingwu, XIE Jianming, WANG Wei, et al. Study on Nonlinear Optimization Correction of Existing Railway Curves with Mixed Constraints[J]. High Speed Railway Technology, 2022, 13(6): 30-35.

radius and the transition curve length can be satisfied. (2) The sum of squares and absolute value of track lining amount at the measuring point are better than the calculated traditional track lining amount. (3) This model can meet the requirement of correcting existing curves for mixed passenger and freight railway, heavy-haul railway and railway speed increase.

**Key words:** curvature; curve correction; mixed linear constraint; track lining amount

既有铁路曲线整正是铁路工务部门维修作业中的一项重点内容。曲线校正可使轨道结构保持标准状态,但列车运行中不可避免的轮轨碰撞使得轨道结构位置发生了变化,尤其线路曲线段的变化严重威胁着列车的运行安全。铁路运营维护中,曲线校正方法主要包括绳正法、偏角法和坐标法<sup>[1-2]</sup>。绳正法用于铁路日常维修,但易出现鹅头问题;偏角法用于铁路大中修,行车干扰较大;坐标法用于提速铁路大中修,精度高,不受行车干扰<sup>[3-4]</sup>。

近些年,很多学者对既有铁路曲线校正做了诸多研究,主要包括:刘鑫提出既有铁路曲线线性约束和非线性目标函数的最优化曲线校正研究,使得曲线校正约束条件和目标函数更精确、合理和科学<sup>[5-6]</sup>;丁克良等利用最小二乘平差法,根据铁路线路特征及曲线校正要求,提出基于曲线平差法的数学模型计算曲线拨道量<sup>[7]</sup>;王保成等根据既有无缝线路提速后曲线校正的实际要求以及保证拨正前后轨道长度不变,提出利用测点坐标直接进行无缝线路曲线校正的方法<sup>[8]</sup>;杨辉等考虑了规范约束和控制点约束,基于罚函数的思想将曲线校正非线性约束转化为无约束问题,建立曲线校正最优化模型<sup>[9]</sup>;秦方方等分析了拟合既有铁路平面线形时产生的主要误差,依据逆向重构理论,提出基于三次样条曲线的铁路既有曲线校正方法;刘永孝等基于坐标法的渐伸线误差分析研究提出,曲线任意点拨距可通过对曲线测点沿径向到拨后设计曲线的距离来计算,该方法能够修正控制点的约束条件以达到约束条件对控制点拨距的限制;刘文涛等利用最小二乘法求得初始半径及缓和曲线长,但计算数据较大且圆曲线长度较难确定<sup>[10-11]</sup>;缪鹏等针对铁路既有曲线校正,提出基于 PSO 的既有曲线校正方法,解决了现有计算中曲线线形参数初始值识别过程复杂的问题<sup>[12]</sup>。

本文在分析了传统曲线校正组成约束条件不足和曲线校正改变轨道几何长度造成的无缝线路锁定轨温变化<sup>[13]</sup>等基础上,提出了一种铁路既有曲线混合约束非线性最优化校正的研究方法。

## 1 铁路线形概略分段

铁路标准线形由直线、缓和曲线和圆曲线组成。

随着科学技术的快速发展,铁路检测维修和养护技术也随之提高。轨检车作为重要的检测手段,成为判断轨道质量状态的重要工具。合理利用轨检车数据,并依此指导现场作业,对保持轨道良好状态水平十分重要。姚连璧等利用三次样条函数,将所有测点拟合成一条曲线,并计算各测点的曲率,通过稳健估计法在曲率图上进行铁路线形的识别<sup>[14]</sup>;石培泽采用十一点曲率法得到测点近似曲率,按照设定阈值识别主点坐标,再根据主点坐标位置划分既有线路各点坐标,实现线形的粗略分段<sup>[15]</sup>。

分析轨检车数据,为进一步探究测点的准确性和适用性,用曲率变化率进行定量说明。曲率变化率示意如图1所示,对其中超过管理限值的点进行处理<sup>[16]</sup>,可获得符合线形要求的曲率图。由曲率图概略反应直线、缓和曲线和圆曲线等铁路线形参数,如图2所示,oa和de段为直线段,ab和cd段为缓和曲线,bc段为圆曲线段。

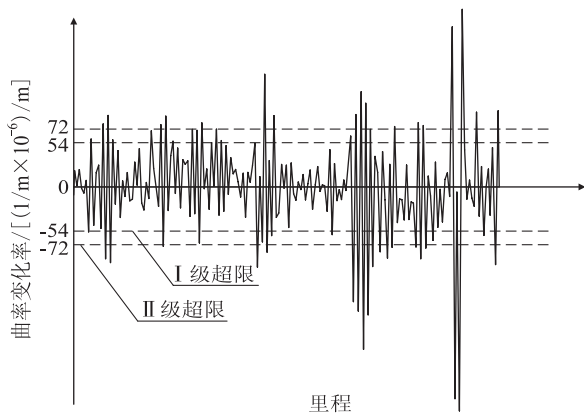


图1 曲率变化率示意图

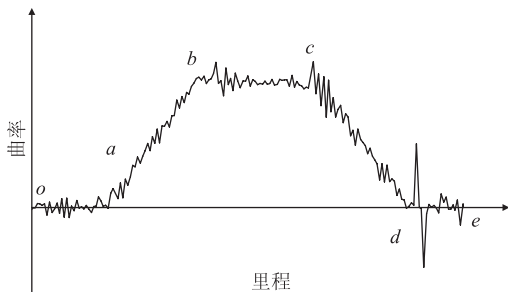


图2 曲率示意图

## 2 计算初始值

### 2.1 计算初始圆心和半径

根据文献[17],按照3点定圆,在曲率梯形图 $bc$ 段取 $n+2$ 个点,可以确定 $n$ 个圆心,再把圆心依次连接,组成1个 $n$ 边形, $n$ 边形的几何重心就是要求的初始圆心。选取 $n$ 边形某一点为顶点,将其分成 $n-2$ 个不交叉重叠的三角形,如图3所示。设圆心 $o_1, o_2, \dots, o_n$ 的坐标分别为 $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_n, q_n)$ ,  $o_1$ 为顶点,则 $n$ 边形几何重心坐标(也即为初始圆心坐标)为:

$$\begin{cases} x = \left[ \sum_{i=2}^{n-1} (p_1 + p_i + p_{i+1}) A \right] / 3 \sum_{i=2}^{n-1} A \\ y = \left[ \sum_{i=2}^{n-1} (q_1 + q_i + q_{i+1}) A \right] / 3 \sum_{i=2}^{n-1} A \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_i & q_i & 1 \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{bmatrix}, i = 2, 3, \dots, n-1。$$

初始半径 $R$ 为:

$$R = \text{int} \left( \sum_{i=1}^n R_i / n \right) \quad (2)$$

其中,  $R_i = \sqrt{(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

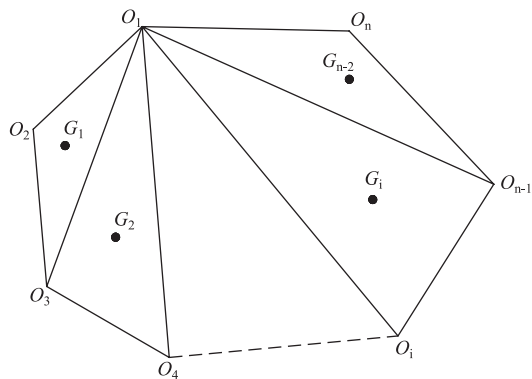


图3  $n$  边形几何重心示意图

### 2.2 计算初始缓和曲线长度

单曲线线形要素示意图4所示, $p_1, p_2$ 是内移距,当圆心和半径确定,内移距即可确定。

由内移距公式  $P = \frac{l_0^2}{24R} - \frac{l_0^4}{2 \cdot 688R^3} \approx \frac{l_0^2}{24R}$ , 可以得到  $l_{01} = \sqrt{24RP_1}$ ,  $l_{02} = \sqrt{24RP_2}$ 。通常,当  $l_{01}, l_{02}$  相差不超过 10 m 时,则  $l_0 = (l_{01} + l_{02})/2$  并取 10 m 整倍数;当  $l_{01}, l_{02}$  相差超过 10 m 时,则取各自的

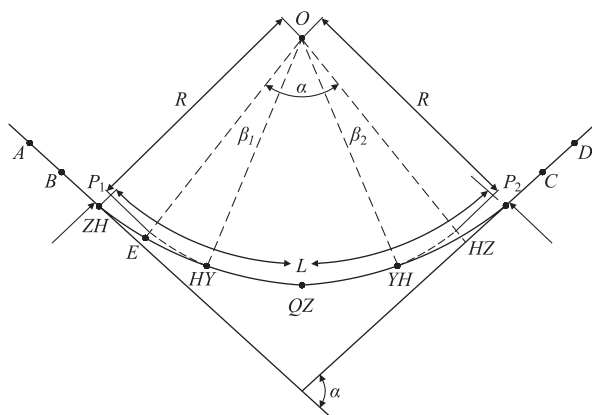


图4 单曲线线形要素示意图

10 m 整倍数。

## 3 曲线校正优化方法

### 3.1 设计变量

参照图4在前直线段上选取 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ 两点,后直线段上选取 $C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ 两点,则偏角  $\alpha = \arctan(\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}) - \arctan(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A})$ 。对于特定的曲线,前后直线不变,则偏角 $\alpha$ 不变。经分析研究,不同的缓和曲线长度和半径,对应的拨道量不同,所以本次设计 $l_{01}, R, l_{02}$ 为变量,即  $X = (l_{01}, R, l_{02})^T$ 。

### 3.2 约束条件

在保证曲线偏角 $\alpha$ 不变的基础上,综合考虑的约束条件有:

- (1)起、终点拨道量为0。
- (2)轨道几何长度保持不变。
- (3)桥、隧等大型构筑物控制点位置拨道量小于规定的限值。
- (4)曲线半径和缓和曲线长度满足TB 10098-2017《铁路线路设计规范》和TG/GW 102-2019《普速铁路线路修理规则》的规定,曲线半径取整,缓和曲线长度为10 m 整倍数。

针对上述约束条件,设约束方程表达式为:

$$H^T X \geq W \quad (3)$$

$$GX = L \quad (4)$$

式中: $H, G$ ——基本约束矩阵,  $H = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ 、

$$G = (g_1, g_2, \dots, g_n);$$

$m$  和  $n$ ——基本约束个数;

$X$ ——设计变量;

$W$ ——基本约束矩阵中的设计允许值,  $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ ;

$L$ ——曲线长度。

由图4可知,缓和曲线角 $\beta = \frac{90l_0}{\pi R} (^{\circ})$ ,左切垂线与缓和曲线的交点为 $E$ , $E$ 点到 $HY$ 点的缓和曲线长度 $\widehat{EHY} = \beta_{01} R = \frac{90l_{01}}{\pi R} \times \frac{\pi}{180} \times R = \frac{1}{2}l_{01}$ 。同理,右切垂线与缓和曲线交点到 $YH$ 点的缓和曲线长度为 $\frac{1}{2}l_{02}$ 。 $L = L_{\text{总}} - L_{\text{直1}} - L_{\text{直2}} = 1/2(l_{01} + l_{02}) + R_{\alpha}$ ,  $L_{\text{圆}} = R_{\alpha} - 1/2(l_{01} + l_{02})$ ,其中 $L_{\text{总}}$ 为轨道几何长度, $L_{\text{直1}}$ 为拨道起点到 $ZH$ 点的直线长度, $L_{\text{直2}}$ 为 $HZ$ 点到拨道终点的直线长度, $L_{\text{圆}}$ 为圆曲线长度, $\alpha$ 为偏角。则约束方程可写为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & \alpha & -1/2 \end{pmatrix} X \geq \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$(1/2 \quad \alpha \quad 1/2) X = L \quad (6)$$

式中: $w_1, w_2, w_3$ ——规范中对应 $l_{01}, R, l_{02}$ 的最小允许值;

$w_4, w_5, w_6$ ——规范中对应 $l_{01}, R, l_{02}$ 的最大允许值的负值;

$w_7$ ——规范中圆曲线长度的最小允许值。

### 3.3 目标方程

以拨道量的平方和最小为目标,即

$$f(X) = D^T D \quad (7)$$

$$D = (d_1(X), d_2(X), \dots, d_N(X))^T \quad (8)$$

式中: $D$ —— $N$ 个分量的向量函数,其分量 $d_i(X)$ 是分量函数的子式。

综上,可得曲线校正优化计算模型:

$$\begin{cases} \min f(X) \\ \text{s. t. } H^T X \geq W \\ GX = L \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可得,该计算模型为含有不等式和等式混合线性约束的非线性目标函数最优化模型。

### 3.4 目标方程求解

利用可行方向法求解本文计算模型。如果式(9)存在非零向量 $d_k$ 同时满足 $\nabla f(X)^T d_k < 0, H^T d_k \geq 0, Gd_k = 0$ ,则 $d_k$ 是 $X$ 处的可行下降方向。设 $X_k$ 为可行域中的可行点,从 $X_k$ 出发,沿 $d_k$ 作一维搜索,得后继迭代点 $X_{k+1} = X_k + \lambda_k d_k$ ,为保证 $X_{k+1}$ 的可行性,进而求解式(10)带约束的一维最优化问题。

$$\begin{cases} \min f(X_k + \lambda d_k) \\ \text{s. t. } H^T(X_k + \lambda d_k) \geq W \\ G(X_k + \lambda d_k) = L \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

具体计算步骤如下:

(1)初始值 $X_0$ ,令 $k=0$ ,允许误差 $\varepsilon > 0$ 。

(2)根据 $X_k$ 处的起作用约束,把 $H$ 分解为 $H_1$ 和 $H_2$ , $W$ 分解为 $W_1$ 和 $W_2$ ,使得 $H_1^T X_k = W_1, H_2^T X_k = W_2$ ,计算 $\nabla f(X_k)$ 。

(3)求解式(11)最优解 $d_k$ :

$$\begin{cases} \min \nabla f(X_k)^T d \\ \text{s. t. } H_1^T d \geq 0 \quad Gd = 0 \\ -1 \leq d_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (11)$$

(4)若 $|\nabla f(X_k)^T d_k| \leq \varepsilon$ ,终止计算;否则,继续计算,得到可行下降方向 $d_k$ ,转步骤(5)。

(5)计算 $\hat{W} = W_2 - H_2^T X_k, \hat{d} = H_2^T d_k$ ,记:

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\hat{H}_i^T}{\hat{d}_i} \mid \hat{d}_i < 0 \right\}, \text{当 } \hat{d} < 0 \text{ 时} \\ +\infty, \text{当 } \hat{d} \geq 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (12)$$

按式(12)求出 $\lambda_{\max}$ ;求解 $\min_{0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} f(X_k + \lambda d_k)$ 的最优解 $\lambda_k$ ,令 $X_{k+1} = X_k + \lambda_k d_k, k = k+1$ ,返回步骤(2)。

### 3.5 计算流程

本文模型计算流程如图5所示。

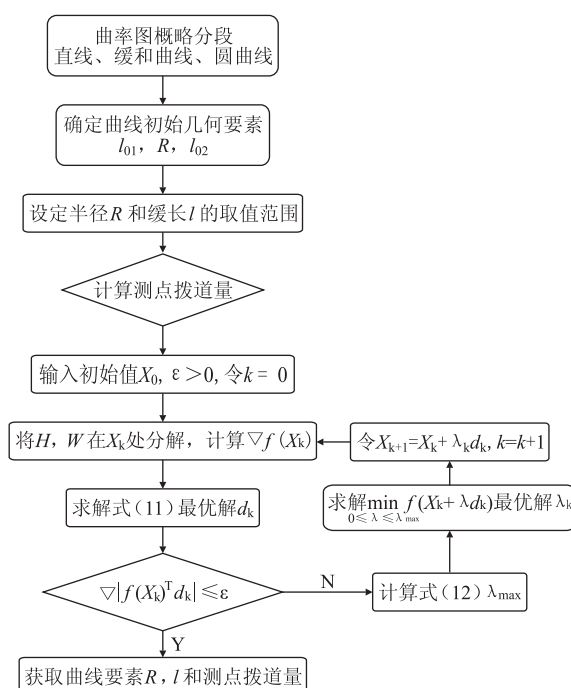


图5 计算流程示意图



4 实例验证

本文模型在兰新铁路大中修中得以应用验证。兰新铁路,东起甘肃省兰州市,途经万里长城西端嘉峪关,西至新疆维吾尔自治区乌鲁木齐市,全长2 423 km。其中兰州至嘉峪关段全线为双线电气化铁路,嘉峪关至乌鲁木齐段为单线电气化铁路。

以兰新铁路 K 109 + 280 ~ K 109 + 820 段为例,曲线偏角  $\alpha = 10.6^\circ$  (左偏),半径  $R = 2\,000\text{ m}$ ,缓和曲线长度  $L_0 = 160\text{ m}$ ,沿线经过1座小桥和1座中桥,桥头桥尾可作为拨道量控制点位置。首先利用轨检车采集坐标数据,轨检车数据里程相对于现场实际里程会有一定的飘移,但在计算中,每次迭代计算都是某一点或者一小段的计算,对计算结果影响不大<sup>[18]</sup>。随后利用计算机程序设计语言 Python 进行自主编程计算最优拨道量。

4.1 计算交点坐标和偏角

计算交点坐标和偏角如表1所示。

表1 交点坐标和偏角表

名称	交点坐标(x, y)	$\alpha$
数值	(4 072 991. 502, 342 046. 019)	- 0. 185

4.2 计算初始圆心坐标、半径和缓长

计算初始圆心坐标、曲线半径和缓和曲线长度如表2所示。

表2 初始圆心坐标、半径和缓长表

初始值名称	圆心坐标(x, y)	R	$L_{01}$	$L_{02}$
数值/m	(4 071 641. 501, 340 558. 262)	2 000	160	160

4.3 计算拨道量并优化

为验证本文模型,通过计算  $\sum (OS - OJ)^2 = f(X)$  和  $\sum |OS - OJ|$ ,与传统的拨道量计算值进行比较,结果均好于传统计算值,表明该模型的准确性和优越性。摘录间隔20 m测点坐标及拨道量计算值,如表3所示。

5 结论

(1)为了使得轨道几何长度在拨道前后不变,可以将其长度作为约束条件,可以满足半径和缓长取整的要求。

(2)相比于传统拨道量,优化后的拨道量结果明显较好,表明该模型具有较好的准确性和优越性。

(3)本文模型约束条件均来源于TB 10098 - 2017《铁路线路设计规范》、TG/GW 102 - 2019《普速铁路

表3 间隔20 m测点坐标及拨道量表

里程	测点坐标		传统拨道	优化拨道	备注
	x/m	y/m	拨道量/m	拨道量/m	
K 109 + 280	4 072 774. 516	342 209. 291	0. 000	0. 000	-
K 109 + 300	4 072 790. 269	342 197. 436	0. 000	0. 006	-
K 109 + 320	4 072 807. 131	342 184. 717	0. 005	0. 006	-
K 109 + 340	4 072 822. 537	342 173. 033	0. 019	0. 018	-
K 109 + 360	4 072 838. 277	342 161. 017	0. 021	0. 020	-
K 109 + 380	4 072 854. 204	342 148. 747	0. 024	0. 022	桥头
K 109 + 400	4 072 869. 748	342 136. 634	0. 029	0. 026	桥尾
K 109 + 420	4 072 885. 956	342 123. 789	0. 032	0. 032	-
K 109 + 440	4 072 901. 004	342 111. 679	0. 033	0. 032	-
K 109 + 460	4 072 916. 615	342 098. 869	0. 036	0. 033	-
K 109 + 480	4 072 932. 078	342 085. 925	0. 036	0. 034	-
K 109 + 500	4 072 947. 170	342 073. 031	0. 036	0. 034	-
K 109 + 520	4 072 962. 890	342 059. 336	0. 028	0. 026	-
K 109 + 540	4 072 977. 091	342 046. 710	0. 028	0. 026	-
K 109 + 560	4 072 991. 757	342 033. 421	0. 032	0. 029	-
K 109 + 580	4 073 006. 489	342 019. 794	0. 033	0. 029	-
K 109 + 600	4 073 021. 597	342 005. 532	0. 034	0. 030	-
K 109 + 620	4 073 035. 047	341 992. 593	0. 028	0. 027	-
K 109 + 640	4 073 050. 549	341 977. 378	0. 020	0. 013	桥头
K 109 + 660	4 073 064. 263	341963. 637	0. 006	- 0. 002	-
K 109 + 680	4 073 077. 739	341949. 872	- 0. 002	- 0. 007	-
K 109 + 700	4 073 091. 917	341 935. 145	- 0. 011	- 0. 011	-
K 109 + 720	4 073 105. 714	341 920. 596	- 0. 015	- 0. 014	桥尾
K 109 + 740	4 073 119. 732	341 905. 630	- 0. 017	- 0. 017	-
K 109 + 760	4 073 132. 842	341 891. 502	- 0. 019	- 0. 017	-
K 109 + 780	4 073 146. 280	341 876. 919	- 0. 019	- 0. 015	-
K 109 + 800	4 073 160. 140	341 861. 822	- 0. 011	- 0. 011	-
K 109 + 820	4 073 173. 806	341 846. 854	0. 000	0. 000	-
-	$\sum (OS - OJ)^2 = f(X)$		0. 015 8	0. 013 5	-
-	$\sum  OS - OJ $		0. 574 9	0. 536 2	-
计算结果	$L_{01}$		180	180	-
-	$R$		2 019	2 022	-
-	$L_{02}$		140	160	-

线路修理规则》,所以该方法适用于客货共线、重载铁路以及铁路大提速既有曲线校正。

参考文献:

[1] 刘永孝,刘学毅,张咏军,等. 铁路既有曲线校正计算中基于坐标法的渐伸线误差分析研究[J]. 铁道学报, 2012, 34(4): 82-87. LIU Yongxiao, LIU Xueyi, ZHANG Yongjun, et al. Study on Involute Errorsin Computation of Existing Railway Curve Realignment [J]. Journal of the China Railway Society, 2012, 34(4): 82-87.

[2] 杨辉,李一龙. 基于坐标的既有铁路曲线校正约束优化算法研究[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(24): 166-171. YANG Hui, LI Yilong. Existing Railway Curve Realignment

- Constrained Optimization Algorithm Research Based on Coordinates [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(24): 166-171.
- [3] BIRKHOLZ A, SCHLEGEL H. Path Optimization by a Variational Reaction Coordinate Method. I. Development of Formalism and Algorithms [J]. Journal of Chemical Physics, 2015, 143(24): 363-368.
- [4] 秦方方,易思蓉,杨长根. 基于三次样条曲线的铁路既有曲线校正方法[J]. 中国铁道科学, 2010, 31(2): 18-23.
- QIN Fangfang, YI Sirong, YANG Changgen. Method for the Realignment of the Existing Railway Curve Based on the Cubic Spline Curve [J]. China Railway Science, 2010, 31(2): 18-23.
- [5] 刘鑫. 既有铁路曲线校正优化计算模型理论分析[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 14(5): 57-63.
- LIU Xin. Theoretical Analysis for the Optimization Calculation Model of the Existing Railway Curve Realignment [J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1994, 14(5): 57-63.
- [6] 刘鑫,曾学贵. 快速铁路既有曲线约束非线性最优化校正研究[J]. 铁道学报, 2003, 25(3): 101-103.
- LIU Xin, ZENG Xuegui. Constrained Nonlinear Optimal Realignment of the Existing Railway Curve [J]. Journal of the China Railway Society, 2003, 25(3): 101-103.
- [7] 丁克良,刘大杰,周全基. 既有铁路曲线校正平差算法[J]. 测绘学报, 2004, 33(3): 195-199.
- DING Keliang, LIU Dajie, ZHOU Quanji. Adjustment Algorithm for Realignment of the Existing Railway Curve [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2004, 33(3): 195-199.
- [8] 王保成,韩峰. 基于坐标测量的既有曲线校正计算优化方法研究[J]. 兰州交通大学学报, 2008, 27(1): 11-13.
- WANG Baocheng, HAN Feng. Research on Optimization Method for the Existing Railway Curve Realignment Based on Coordinate Measurement [J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2008, 27(1): 11-13.
- [9] 杨辉,李一龙. 基于坐标的既有铁路曲线校正约束优化算法研究[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(24): 166-171.
- YANG Hui, LI Yilong. Existing Railway Curve Realignment Constrained Optimization Algorithm Research Based on Coordinates [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(24): 166-171.
- [10] 刘文涛. 基于坐标算法的铁路线路校正系统研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2013.
- LIU Wentao. Research the Railway Realignment System Based on the Coordinate Algorithm [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2013.
- [11] HOU Maoshen. Research on Constrained Optimization of Coordinate Method in Railway Curve Realignment [J]. Journal of Lanzhou Institute of Technology, 2014, 21(4): 38-41.
- [12] 缪鹏,田家凯,杨小礼. 基于PSO的既有曲线校正方法[J]. 中国铁道科学, 2014, 35(3): 8-14.
- MIAO Kun, TIAN Jiakai, YANG Xiaoli. Realignment Method for Existing Railway Curve Based on PSO [J]. China Railway Science, 2014, 35(3): 8-14.
- [13] 王保成,韩峰. 基于坐标测量的既有曲线校正计算优化方法研究[J]. 兰州交通大学学报, 2008, 27(1): 11-13.
- WANG Baocheng, HAN Feng. Research on Optimization Method for the Existing Railway Curve Realignment Based on Coordinate Measurement [J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2008, 27(1): 11-13.
- [14] 姚连璧,刘春. 样条函数与稳健估计在线路线形识别中的应用[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2004, 32(7): 943-946.
- YAO Lianbi, LIU Chun. Spline Function and Robust Estimation Applied in Line Type Identification for Railways [J]. Journal of Tongji University, 2004, 32(7): 943-946.
- [15] 石培泽. 高速客运专线平面曲线重构方法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2018.
- SHI Peize. Study on Plane Curve Reconstruction Method of High-Speed Passenger Dedicated Line [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2018.
- [16] 潘振兴,韩峰,王博,等. 基于曲率变化特征的既有线路校正算法设计[J]. 铁道标准设计, 2019, 63(9): 6-10.
- PAN Zhenxing, HAN Feng, WANG Bo, et al. Design and Practice of Existing Railway Line Realignment Algorithm Based on Curvature Variation Characteristics [J]. Railway Standard Design, 2019, 63(9): 6-10.
- [17] 王博,韩峰. 基于坐标测量的既有曲线校正算法设计与实现[J]. 铁道科学与工程学报, 2019, 16(6): 1398-1404.
- WANG Bo, HAN Feng. Design and Practice of Existing Railway Curve Realignment Algorithm Based on Coordinate Measurement [J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2019, 16(6): 1398-1404.
- [18] 俞佳伟. 基于轨检车数据的铁路曲线校正计算方法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2014.
- YU Jiawei. Study on Calculation Method of the Railway Curve Lining Based on Track Geometry Car Inspection Data [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2014.