

文章编号: 1674—8247(2023)02—0028—05

DOI: 10. 12098/j. issn. 1674 - 8247. 2023. 02. 006

# 回旋线与三次抛物线缓和曲线线形及设计参数对比探讨

胡安华

(中铁二院(成都)建设发展有限责任公司, 成都 610031)

**摘要:**线路设计时,采用正确的缓和曲线线形是保证列车安全平稳运行的关键。缓和曲线线形的选择应重视交通类型及运行条件。本文从线形方程特征参数、轨道动力特性和线路测设计算等方面,对三次抛物线和回旋线用作缓和曲线的适用性进行对比分析。研究表明,铁路等轮轨轨道交通中,缓和曲线不能用回旋线简单替代三次抛物线。最后,提出了三次抛物线设计参数的具体确定方法,为铁路线路设计、轨道施工和后期养护维修提供技术指导。

**关键词:**缓和曲线;回旋线;三次抛物线;高速铁路;设计参数

中图分类号: U212. 33+2. 1 文献标识码: A

## Comparison and Discussion on Alignment and Design Parameters of Clothoid and Cubic Parabola as Transition Curve

HU Anhua

(CREEC(Chengdu) Construction and Development Co., Ltd., Chengdu 610031, China)

**Abstract:** The correct transition curve alignment selected during track design is the key to ensuring the safe and stable operation of the train. The selection of transition curve alignment shall take into account the type of traffic and operation conditions. In this paper, the applicability of using the cubic parabola and clothoid as transition curves were compared and analyzed from the aspects of characteristic parameters of alignment equation, dynamic characteristics of the track, and design calculation of alignment. The results show that for the transition curve, the cubic parabola cannot be simply replaced with the clothoid in the rail transit of wheel-rail such as railway. Finally, the method of determining the design parameters of the cubic parabola is put forward to provide technical guidance for railway track design, track construction, and later maintenance.

**Key words:** transition curve; clothoid; cubic parabola; high-speed railway; design parameters

高速铁路的线路平顺性和轨道结构质量直接影响列车运行的安全性、舒适性,是高速铁路的关键核心技术之一。在铁路线路设计中,受列车结构和轮轨接触条件限制,缓和曲线的线形较直线和圆曲线复杂,且设计参数较多,确定难度大。为保证旅客乘车的安全性和舒适度, TB 10621 - 2014《高速铁路设计

规范》对缓和曲线的设计提出了较为严格的标准和要求<sup>[1]</sup>。

以前的设计规范如1975年《铁路工程技术规范》和GBJ 90 - 85《铁路线路设计规范》均没有明确缓和曲线线形及参数,缓和曲线一般采用回旋线<sup>[2]</sup>。1995年,原铁道部《高速铁路线桥隧设计参数选择的

收稿日期:2023-03-13

作者简介:胡安华(1982-),男,高级工程师。

引文格式:胡安华. 回旋线与三次抛物线缓和曲线线形及设计参数对比探讨[J]. 高速铁路技术,2023,14(2):28-32.

HU Anhua. Comparison and Discussion on Alignment and Design Parameters of Clothoid and Cubic Parabola as Transition Curve [J]. High Speed Railway Technology, 2023, 14(2):28-32.

研究》推荐三次抛物线形作为高速铁路缓和曲线首选线形,自 GB 50090-99《铁路线路设计规范》开始,轮轨轨道交通设计规范明确缓和曲线应采用三次抛物线<sup>[3-5]</sup>,磁浮交通也宜采用<sup>[6]</sup>。与此不同,道路规范要求应采用回旋线<sup>[7-8]</sup>。三次抛物线能满足高铁测设要求<sup>[9]</sup>,但在路线设计、轨道施工和养护维修中,常会误采用回旋线缓和曲线,导致测设错误,降低轨道质量和安全。

本文从线形方程的特征参数、轨道动力特性和线路测设计算等方面,对三次抛物线和回旋线用作缓和曲线的适用性进行对比分析,为轮轨轨道交通线路设计、轨道施工和后期运营维护提供技术指导。

## 1 回旋线与三次抛物线对比

### 1.1 线形方程式和线形特征对比

当汽车车辆匀速行驶在直线-圆曲线段(ZY)或圆曲线-直线段(YZ)时,其行驶轨迹的曲线长与曲率半径之乘积为一常数,该曲线方程与回旋线线形相符。因此道路缓和曲线多采用回旋线,回旋线的直角坐标方程式为:

$$y = \frac{x^3}{6C} \left( 1 + \frac{3x^4}{40C^2} + \dots \right) \quad (1)$$

式中: $C$ ——常数,设计半径与缓和曲线长度之乘积。

列车轮对走行与汽车行驶的原理和轨迹截然不同,由于列车经过曲线轨道时需借助转向架完成,应避免转向架以斜接方式行驶通过线路曲线段。如图1所示,与回旋线相比,三次抛物线的线形更加平顺,可较好实现直线段与圆曲线段的过渡连接。

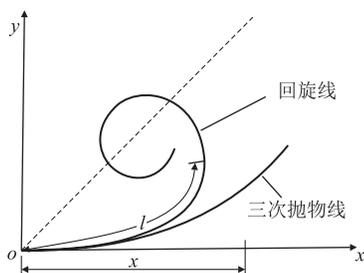


图1 回旋线与三次抛物线线形对比图

三次抛物线基本型的直角坐标方程式如下<sup>[10]</sup>:

$$y = \frac{x^3}{6RX} \quad (2)$$

式中: $R$ ——圆曲线设计半径;

$x$ ——缓和曲线段任意点的横轴坐标值。

对比分析三次抛物线与回旋线函数图像后发现,两者存在较大差异:一方面当极角很小时,回旋线和

三次抛物线两种线形相近,当极角较大时,两种线形差别很大。随着极角的增加,三次抛物线的长度增长速度明显比回旋线快;回旋线的半径衰减速率明显比三次抛物线大,这意味着三次抛物线作为缓和曲线时,列车行驶更平稳、安全,乘坐更舒适;另一方面,两种曲线在起始阶段的线形非常接近,但距离曲线的起点越远(缓和曲线较长时),回旋线的曲率快速增大,导致缓和曲线线路长度取值受限,无法达到高速铁路的设计半径和缓和曲线长度要求。因此,高速铁路不能直接采用回旋线替换三次抛物线作为缓和曲线。

### 1.2 动力特性对比分析

为保证高速列车能够安全平稳地行驶,缓和曲线长度不易过短,且外轮的升降速度及欠超高时变率不易过大,以保证旅客的乘坐舒适性。通常当缓和曲线长度达到一定要求,6种线形均能满足列车安全行驶和旅客乘坐舒适的要求,但取值长度过大将影响平面选线和横、纵断面设计的灵活性,导致工程投资增大。同时考虑施工和养护维修的简便性,使用时需根据现行规范建议值,缓和曲线取值长度的选择应从长到短,因地制宜,合理选用。

除此,回旋线作为高速铁路缓和曲线,且设计长度相同时,旅客舒适度是否一样呢?列车经过缓和曲线时的运行轨迹是空间变化曲线,其动力特性非常复杂。与直线运行受力特征显著不同,曲线运行的离心力和外轨不连续超高形成的冲击力都会影响到列车运行。

当采用三次抛物线用作缓和曲线时,列车在缓和曲线起点处的法向加速度线性逐渐增加至终点对应的恒定值(圆曲线段加速度),即列车在缓和曲线段的加速度变化率为常数。进一步分析,列车加速度变化率沿缓和曲线的法向分量数值不变,但在缓和曲线上向心加速度值随匀速行驶时间线性变化<sup>[11]</sup>。与三次抛物线相比,当缓和曲线的长度相同时,回旋线方程式中含有三次项和多个高次项,如式(1)所示。由此可以看出,列车沿回旋线行驶时的加速度变化率是非线性增加,造成行车安全性和乘车舒适性降低较大。

## 2 缓和曲线参变方程及参数

### 2.1 几何特征和线形条件

超高路段的缓和曲线轨距呈线性变化,几何特征具体如下:

(1)连接直线和设计半径 $R$ 的圆曲线,曲率由0到 $1/R$ 逐渐变化。

(2) 缓和曲线段外轨超高, 由直线段上的零值逐渐升至圆曲线全超高值, 并与设计圆曲线超高相连接。

(3) 连接半径小于 350 m 圆曲线时, 在整个缓和曲线长度内, 轨距的加宽呈线性递增, 从零至圆曲线全加宽值。

由此, 缓和曲线是一条任意点曲率与外轨超高相配合的空间曲线, 其线形条件要求如表 1 所示。

表 1 缓和曲线线形条件表

序号	符号	始点(ZH点) $l=0$	终点(HY点) $l=l_0$	线形过渡要求
1	$y$	0	$y_0$	始点至终点 连续均匀变化
2	$\varphi$	0	$\varphi_0$	
3	$K$	0	$1/R$	
4	$dK/dl$	0	0	
5	$d^2K/d^2l$	0	0	

在列车运行速度较低时, 缓和曲线满足表中前三项即可。当行驶速度较高时, 采用曲线形超高顺坡, 缓和曲线的始点和终点处超高顺坡倾角为零, 当列车经过以上位置时, 轮对会对外轨产生巨大冲击力。为消除冲击力影响, 线路设计须满足表 1 中后两项要求。

## 2.2 参变方程及参数

### (1) 回旋线方程

若回旋线方程变量为缓和曲线长度  $l$  时, 回旋线方程式如式(3)所示, 该公式常误导为三次抛物线。

$$\begin{cases} x = l - \frac{l^3}{40R^2l_0^2} \\ y = \frac{l^3}{6Rl_0} \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $l_0$ ——缓和曲线设计长度;

$l$ ——缓和曲线上任意点距离起点(ZH点或HZ点)的长度。

### (2) 三次抛物线方程近似解一

当缓和曲线极角很小时, 曲线近似于直线, 式(3)中  $l \approx x$ , 回旋线缓和曲线可表示如下:

$$y = \frac{x^3}{6Rl_0} \quad (4)$$

式(4)中的“三次抛物线”, 在软件 AutoCAD 中被称为立方抛物线。当  $l=l_0$  时(缓和曲线 HY 点或 YH 点), 由该式推导所得的曲率半径不等于设计半径  $R$ , 且这种偏差会随着极角的增加而增大, 不满足缓和曲线边界线形条件要求, 不能作为三次抛物线缓和曲线线形。

### (3) 三次抛物线方程近似解二

三次抛物线方程式如式(2)所示, 式中  $X$  值是与

设计缓和曲线长度相关的参数, 为三次抛物线缓和曲线  $l=l_0$  时(HY 点或 YH 点)缓和曲线上的  $x$  轴坐标值, 与设计半径及缓和曲线长度相关。部分文献直接将  $X$  等同于回旋线 HY 点的  $x$  坐标值, 并按照式(3)计算  $X$  值。三次抛物线方程的近似解表示为:

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{6RX} \\ X = l_0 - \frac{l_0^3}{40R^2} \end{cases} \quad (5)$$

计算结果表明, 上式的计算精度高于式(4), 但按照回旋线参数公式计算  $X$  值所得计算结果仍不准确。尤其是缓和曲线长度大、极角较大时, 缓和曲线 HY 点或 YH 点处的曲率半径与设计半径相差较大, 不能满足缓和曲线线形条件要求, 也不能作为三次抛物线缓和曲线线形。

### (4) 三次抛物线缓和曲线精确解

为保证 HY 点或 YH 点处曲率半径与设计半径严格相等, 且能够满足铁路线形设计要求, 需结合缓和曲线边界条件准确计算参数  $X$  值。通过三次抛物线式(2), 缓和曲线上任意点的曲率方程式表示如下:

$$k = \frac{x}{RX[1 + (\frac{x^2}{2RX})^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

式中:  $k$ ——缓和曲线上任意点的曲率。

根据铁路缓和曲线边界线形条件和式(6), 缓和曲线在 HY 点处  $k=1/R$ , 采用迭代法或微积分方式可计算出参数  $X$  值<sup>[12]</sup>。推导展开后, 幂级数多项式计算方程如下:

$$X = l_0 \left[ 1 - \frac{2}{5} \left( \frac{l_0^2}{R^2} \right) - \frac{547}{3\,600} \left( \frac{l_0^2}{R^2} \right)^2 - \frac{27\,137}{234\,000} \left( \frac{l_0^2}{R^2} \right)^3 - \dots \right] \quad (7)$$

采用式(7)可精确计算出三次抛物线缓和曲线方程式(2)的参数  $X$  值, 所得计算结果与迭代法计算结果偏差值相差在  $10^{-2}$  mm 级别。

## 3 测设位置对比分析

### 3.1 计算对比

根据式(2)、式(3)和式(7), 按现行铁路设计规范缓和曲线长度表数值, 以缓和曲线 ZH 点为直角坐标原点、直线边为  $x$  轴, 在两种线形时缓和曲线 HY 点竖向  $Y$  坐标值进行计算。在缓和曲线 ZH(或 HZ)点时, 曲率均为 0; 在缓和曲线 HY(或 YH)点时, 三次抛物线和回旋线的曲率半径均为设计半径。同时, 三次抛物线缓和曲线在起点和终点处圆顺地切入了直线与设计圆弧, 满足缓和曲线的线形条件要求。

表2 三次抛物线与回旋线在HY点处的竖向坐标对比表

序号	设计速度/(km/h)	设计半径和缓和曲线长度/m	三次抛物线	回旋线	差值 $\Delta Y/\text{mm}$
			Y/m	Y/m	
1	120(限)	$R=800, l_0=200$	7.911 77	8.333 33	-421.56
2	120	$R=3\ 000, l_0=50$	0.138 86	0.138 89	-0.03
3	80(限)	$R=1\ 000, l_0=40$	0.266 33	0.266 67	-0.34
4	120	$R=1\ 000, l_0=140$	3.215 26	3.266 67	-51.41
5	200	$R=2\ 200, l_0=300$	6.716 41	6.818 18	-101.77
6	200(限)	$R=2\ 200, l_0=360$	9.606 83	9.818 18	-211.35
7	250	$R=2\ 800, l_0=380$	8.468 16	8.595 24	-127.08
8	250	$R=2\ 800, l_0=490$	13.939 55	14.291 67	-352.12
9	300	$R=6\ 000, l_0=450$	5.599 66	5.625 00	-25.34
10	350	$R=6\ 000, l_0=670$	12.344 77	12.469 44	-124.67
11	250	$R=7\ 000, l_0=190$	0.859 02	0.859 52	-0.50
12	350	$R=7\ 000, l_0=670$	10.609 63	10.688 10	-78.47
13	250	$R=8\ 000, l_0=170$	0.601 87	0.602 08	-0.21
14	350	$R=8\ 000, l_0=590$	7.220 50	7.252 08	-31.58
15	250	$R=9\ 000, l_0=150$	0.416 57	0.416 67	-0.10
16	350	$R=9\ 000, l_0=530$	5.187 41	5.201 85	-14.44

表2为三次抛物线与回旋线在HY点处的竖向坐标对比表。由表2可知:(1)三次抛物线的纵坐标值均小于回旋线,说明设计半径和缓和曲线长度相同时,缓和曲线位置不同,也说明计算结果符合函数图像理论相对关系。(2)设计半径越大、缓和曲线长度越小, HY点三次抛物线缓和曲线越接近回旋线缓和曲线,设计中应尽量避免较小的设计半径和较短缓和曲线。(3)两种线形的缓和曲线实际测设坐标位置可能相差很大,同类项目使用的软件应采用相同的缓和曲线设计参数,并且严格按照规范要求的线形设计。(4)当线路设计速度较低时,缓和曲线长度较短(如表2),回旋线坐标位置与三次抛物线相差很小;但是高速铁路缓和曲线长度大幅增加,两种曲线的坐标位置相差很大。

综上所述,高速铁路线路设计中不能采用回旋线简单替代三次抛物线缓和曲线。工程实践中,可根据地形条件、工程需要和设计规范取值要求,在圆曲线和直线间插入首尾相切的三次抛物线缓和曲线,操作简单,具有较强的适应性。

### 3.2 施工及养护维修

高质量的铁路轨道几何线形是保证列车安全平稳行驶和旅客乘坐舒适的基础。我国高速铁路轨道的施工和养护维修最终通过精测精调完成。静态精调控制轨距、水平、轨向、扭曲、高低、中线等偏差;动态精调在联调联试时对局部缺陷修复微调,使轮轨关系匹配良好,精调后,轨道才能满足高速行车安全性、平稳性和乘坐舒适性的要求。

高速铁路正线轨道精调整理后,铺设精度允许的

中线偏差为10 mm、轨向偏差为2 mm(弦长10 m)<sup>[13]</sup>,根据表2,如设计和施工、养护维修各参与方使用不同软件,并且分别采用三次抛物线、回旋线缓和曲线方程式,两种缓和曲线计算的实际测设位置存在很大差距,而且两种缓和曲线大多数的坐标差值远大于允许偏差值。轨道中线和轨向与设计线形直接相关,所以轮轨轨道交通项目建设中,设计、轨道施工和养护维修各参与方应采用相同的三次抛物线线形及设计参数开展工作。

## 4 结束语

回旋线与三次抛物线缓和曲线截然不同,回旋线缓和曲线用于道路交通,三次抛物线缓和曲线用于轨道交通。在我国设计规范要求采用三次抛物线作为铁路等轮轨轨道交通的缓和曲线,不能简单采用回旋线替代。在铁路线路设计、轨道施工及后期养护维修时,各参与方应注意使用相同的缓和曲线线形和设计参数,提高线路质量和运行安全性。

## 参考文献:

- [1] TB 10621-2014 高速铁路设计规范[S].  
TB 10621-2014 Code for Design of High Speed Railway[S].
- [2] 赫赢. 铁道工程[M]. 北京:中国铁道出版社,1999.  
Hao Ying. Railway Engineering[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1999.
- [3] GB 50090-2006 铁路线路设计规范[S].  
GB 50090-2006 Code for Design of Railway Line[S].
- [4] GB 50157-2013 地铁设计规范[S].  
GB 50157-2013 Code for Design of Metro[S].
- [5] TB 10623-2014 城际铁路设计规范[S].  
TB 10623-2014 Code for Design of Intercity Railway[S].
- [6] CJJ/T 262-2017 中低速磁浮交通设计规范[S].  
CJJ/T 262-2017 Code for Design of Medium and Low Speed Maglev Traffic[S].
- [7] JTG D20-2017 公路路线设计规范[S].  
JTG D20-2017 Design Specification for Highway Alignment[S].
- [8] CJJ 193-2012 城市道路路线设计规范[S].  
CJJ 193-2012 Code for Design of Urban Road Alignment[S].
- [9] 余时民, 虞立新. 三次抛物线测设高速铁路曲线[J]. 高速铁路技术, 2010, 12(S1): 18-24.  
Yu Shimin and Tuo Lixin. Cubic Parabola Survey of High-speed Railway Curve[J]. High Speed Railway Technology. 2010, (Supplement): 18-24.
- [10] Nikolaos Eliou · Georgios Kaliabetsos, A New, Simple and Accurate Transition Curve Type for Use in Road and Railway Alignment Design[J]. Eur Transp Res Rev. 2014, 6: 171-179.
- [11] 余守宪, 赵雁. 加加速度(加速度的时间变化率): 冲击、乘坐舒适性、缓和曲线[J]. 物理与工程, 2001, 11(3): 7-12, 22.

SHE Shouxian, ZHAO Yan. JERK (THE Time Rate of Change of Acceleration)—Impact, Passenger's Comfortability, Transition Curve [J]. Physics and Engineering, 2001, 11(3): 7-12, 22.

[12] 王国栋, 马俊海. 铁路三次抛物线缓和曲线的计算[J]. 交通科技与经济, 2011, 13(1): 13-16.

WANG Guodong, MA Junhai. Calculation of Railway Cubic Parabola

Transition Curve [J]. Technology & Economy in Areas of Communications, 2011, 13(1): 13-16.

[13] Q/CR 9605-2017 高速铁路轨道工程施工技术规程[S].

Q/CR9605-2017 Technical Specification for Construction of High-speed Railway Track Engineering [S].

(上接第27页)

钢柱出现了很大的弯曲塑性变形。

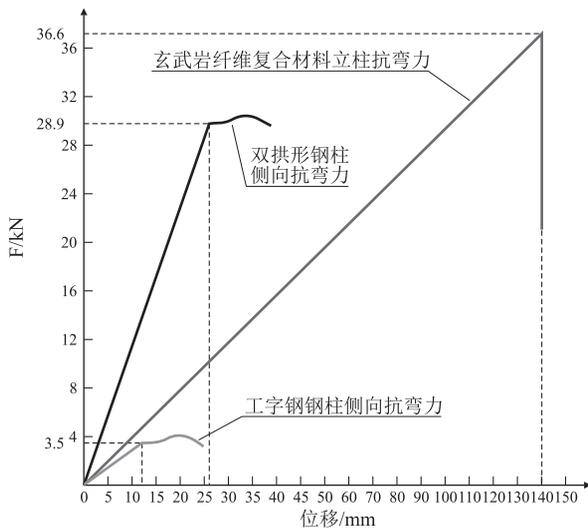


图5 不同柔性防护立柱的力值~位移曲线图

## 5 结论

本文通过理论计算、数值模拟和室内试验对玄武岩纤维复合材料被动网立柱抗弯性能进行了对比研究,得出以下结论:

(1) 确定了立柱所用玄武岩纤维复合材料的配合比的体积分量,建议基体材料体积分量控制在25%~35%之间,以满足立柱抗弯能力的需要。

(2) 玄武岩纤维复合材料柔性防护立柱采用中空圆形结构,圆截面外径为167,内径为141,理论计算、数值模拟及室内试验结果基本相近,其抗弯刚度比传统的工字钢柱(18号)抗弯力提高了8倍以上,具有较广阔的应用前景。

(3) 玄武岩纤维复合材料柔性防护立柱比传统的

工字钢柱重量减轻约50%,大大降低了其搬运难度,提高了施工便捷性。

## 参考文献:

- [1] 刘成清, 陈林雅. 被动柔性防护网在边坡防护中的工程应用与研究[J]. 公路, 2015, 60(6): 44-50.  
LIU Chengqing, CHEN Linya. Application and Study of Passive Flexible Protective Net in Slope Protection [J]. Highway, 2015, 60(6): 44-50.
- [2] 李念. SNS 边坡柔性安全防护系统工程应用[M]. 西南交通大学出版社, 2009, 1-2.  
LI Nian. Engineering Application of SNS Slope Flexible Safety Protection System [M]. Southwest Jiaotong University Press, 2009, 1-2.
- [3] 赵世春, 余志祥, 韦韬, 等. 被动柔性防护网受力机理试验研究与数值计算[J]. 土木工程学报, 2013, 46(5): 122-128.  
ZHAO Shichun, YU Zhixiang, WEI Tao, et al. Test Study of Force Mechanism and Numerical Calculation of Safety Netting System [J]. China Civil Engineering Journal, 2013, 46(5): 122-128.
- [4] 邓宗才, 薛会青. 玄武岩纤维混凝土的抗弯冲击性能[J]. 建筑科学与工程学报, 2009, 26(1): 80-83.  
DENG Zongcai, XUE Huiqing. Flexural Impact Behavior of Basalt Fiber Concrete [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2009, 26(1): 80-83.
- [5] 吴刚, 魏洋, 蒋剑彪, 等. 玄武岩纤维与碳纤维加固混凝土矩形柱抗震性能比较研究[J]. 工业建筑, 2007, 37(6): 14-18, 69.  
WU Gang, WEI Yang, JIANG Jianbiao, et al. Comparative Study on Seismic Performance of Rectangular Concrete Columns Strengthened with BFRP and CFRP Composites [J]. Industrial Construction, 2007, 37(6): 14-18, 69.
- [6] 同济大学航空航天与力学学院基础力学实验中心. 材料力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 2012.  
Teaching and Research Department of General Mechanics, School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics of Tongji University. Material Mechanics [M]. Shanghai: Tongji University Press, 2012.