

文章编号: 1674—8247(2023)05—0045—06

DOI:10.12098/j.issn.1674-8247.2023.05.009

# 基于改进马尔科夫模型的铁路客运量预测研究

杨 飞 张云娇 范丁元

(中铁工程设计咨询集团有限公司, 北京 100055)

**摘 要:**为提高铁路客运量预测的精度,在预测精度更优条件下,对马尔科夫模型状态划分区间的取值范围进行了研究,并在此基础上对模型进行了改进。先通过多层感知器神经网络预测了2004—2019年北京市的铁路客运量,再运用改进的马尔科夫模型对多层感知器神经网络预测结果进行修正,并与均等划分和均值-方差法划分状态区间的马尔科夫模型的预测修正结果进行对比。研究表明,改进的马尔科夫模型降低了预测过程的复杂性,具有更高的预测精度。相比于均等划分、均值-方差法划分状态区间的模型,改进的马尔科夫模型的预测误差分别减少了0.601%和0.683%。

**关键词:**铁路客运量;优化;马尔科夫模型;状态区间划分;预测

中图分类号:U294.1+3

文献标志码:A

## A Study on Railway Passenger Volume Forecast Based on Improved Markov Model

YANG Fei ZHANG Yunjiao FAN Dingyuan

(China Railway Engineering Design and Consulting Group Co., Ltd., Beijing 100055, China)

**Abstract:** To improve the accuracy of railway passenger volume forecast, the value range of state division intervals in the Markov model was studied under better forecast accuracy conditions, and then the model was improved based on the results. The railway passenger volume in Beijing from 2004 to 2019 was forecasted using a multilayer perceptron neural network. The improved Markov model was then used to adjust the forecast results from the neural network, and the results were compared with those from Markov models using equal division and mean-variance method for state interval division. The findings indicate that the improved Markov model reduces the complexity of the forecasting process and has higher forecast accuracy. Compared to the models using equal division and mean-variance method for state interval division, the improved Markov model reduces the forecast errors by 0.601% and 0.683% respectively.

**Key words:** railway passenger volume; optimization; Markov model; state interval division; forecast

随着我国工业化和城镇化的快速发展,铁路因其大运量、便捷、快速、舒适等特性,在保障城镇人口大量流动,促进经济联系,带动相关产业结构优化升级方面起到了重要作用。铁路客运量预测是制定铁路客运宏观发展战略和编制客运计划的重要依据,其准确性与可靠性对制定铁路线网规划、设计列车开行方

案、优化客运产品结构、提升旅客运输服务水平等具有重要意义<sup>[1]</sup>。

铁路客运量预测方法可分为线性预测和非线性预测模型两类。其中,线性预测模型中应用较广的是线性回归预测,而神经网络预测模型凭借其高度的非线性、强大的学习性等特点成为非线性预测方法的代

收稿日期:2021-10-12

作者简介:杨飞(1995-),男,工程师。

引文格式:杨飞,张云娇,范丁元. 基于改进马尔科夫模型的铁路客运量预测研究[J]. 高速铁路技术,2023,14(5):45-50.

YANG Fei, ZHANG Yunjiao, FAN Dingyuan. A Study on Railway Passenger Volume Forecast Based on Improved Markov Model[J]. High Speed Railway Technology, 2023, 14(5):45-50.

表。无论采用哪一种预测方法,预测结果与实际客运量均存在一定的误差。因此,许多学者会先对研究对象进行运量预测,再借助马尔科夫模型对预测结果进行修正,以提高模型预测结果的精度。吕鹏飞<sup>[2]</sup>应用马尔科夫模型对船舶交通量的多层感知器神经网络预测结果进行修正;裴同松<sup>[3]</sup>应用马尔科夫模型对公路客运量的多层感知器神经网络预测结果进行改进;尚庆松<sup>[4]</sup>结合马尔科夫模型与灰色预测模型对售票窗口的客运量进行预测;周子东<sup>[5]</sup>利用马尔科夫模型对最小二乘回归模型的预测结果进行修正;马彩雯<sup>[6]</sup>利用马尔科夫模型对灰色预测模型的预测结果进行改进。马尔科夫模型在预测过程中,通常采用统计估算法对预测结果所属的状态区间进行划分,常用的有均等划分、均值-方差法和黄金分割法等。这类方法划分状态区间时,状态区间划分的数量和取值具有一定的主观性和随机性,使得马尔科夫模型对预测值的改进效果具有一定的不确定性,可能导致马尔科夫修正值的精度更差,影响整体预测精度。潘丽<sup>[7]</sup>将预测误差状态区间划分为长度相等的区间并进行马尔科夫修正,即区间均等划分,其第5组马尔科夫预测修正值的误差较修正前大1.87%;何启<sup>[8]</sup>通过均值-方差法将预测结果划分为5个不同的状态,其第4组马尔科夫预测修正值的误差较修正前大0.336%。

为了解决马尔科夫模型在预测过程中的不确定性问题,并提高其预测精度,本文在预测精度更优条件下,研究马尔科夫模型中状态区间划分的取值方法。通过多层感知器神经网络预测2004—2019年的北京市铁路客运量,运用改进的马尔科夫模型对多层感知器神经网络预测结果进行修正,并与均等划分、均值-方差法划分状态区间的马尔科夫模型的预测修正结果进行对比,以验证改进马尔科夫模型的预测效果。

## 1 马尔科夫预测模型

马尔科夫理论多用于研究时间序列数据的状态和转移规律,其认为一个序列可划分为若干种状态,时刻 $t_i$ 的状态仅由时刻 $t_{i-1}$ 的状态决定,而与 $t_{i-1}$ 之前的状态无关,即马尔科夫性质。假设铁路客运量预测误差的状态变化具有马尔科夫性质,一组铁路客运量的预测误差序列 $S(t)$ 可划分为 $m$ 种状态,通过研究序列 $S(t)$ 中各状态的初始概率向量和状态转移规律,来预测该序列下一时刻最有可能所处的状态,进一步对预测结果进行修正。运用马尔科夫模型对铁路客运量进行预测修正过程可分为以下5步:

### (1) 铁路客运量预测

选择一种合适的方法先对研究区域往年及预测年度的铁路客运量进行预测并计算其误差。

### (2) 划分状态区间

以往年客运量预测误差序列 $S(t)$ 为研究对象,将其分为 $E_1, E_2, \dots, E_m$ 种状态,其中 $E_i \in [a_i, b_i)$ ,常用的状态划分方法有区间均等划分、均值-方差法等。

### (3) 计算状态转移概率矩阵

根据状态划分区间将往年客运量的预测误差归属于相应的状态,并计算状态 $E_i$ 经过一步转移到状态 $E_j$ 的概率<sup>[9]</sup>:

$$P_{i \rightarrow j}^1 = \frac{m_{i \rightarrow j}^1}{\sum m_{i \rightarrow j}^1} \quad (1)$$

式中: $m_{i \rightarrow j}^1$ —— $E_i$ 经过一步转移到状态 $E_j$ 的频数;  
 $\sum m_{i \rightarrow j}^1$ —— $E_i$ 出现的总频数。

则一步状态转移矩阵为:

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{1 \rightarrow 1}^1 & P_{1 \rightarrow 2}^1 & P_{1 \rightarrow 3}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ P_{i \rightarrow 1}^1 & P_{i \rightarrow 2}^1 & P_{i \rightarrow j}^1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

根据C-K方程,状态 $E_i$ 经过 $k$ 步转移到状态 $E_j$ 的概率矩阵为:

$$P_k = (P_1)^k \quad (3)$$

### (4) 计算初始状态的概率向量

假设往年铁路客运量预测误差序列 $S(t)$ 中最后一组样本的状态为 $E_i$ ,则其初始状态概率向量 $P(0)$ 是第 $j$ 列概率为1且其余列概率为0的行向量:

$$P(0) = (0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0) \quad (4)$$

### (5) 修正铁路客运量预测值

初始状态概率向量经过 $k$ 步转移到预测年度的状态概率向量 $P(k)$ 为:

$$P(k) = P(0) \times P_k \quad (5)$$

根据状态向量 $P(k)$ 可以判断预测年度所处的误差状态 $E_i$ ,原预测值的马尔科夫修正值计算公式为:

$$S_{\text{修正}} = \frac{S_{\text{预测}}}{1 + (a_i + b_i)/2} \quad (6)$$

式中: $S_{\text{预测}}$ ——铁路客运量预测值;

$S_{\text{修正}}$ ——铁路客运量预测值的马尔科夫修正值;

$a_i, b_i$ ——状态 $E_i$ 的区间取值。

## 2 马尔科夫模型改进

### 2.1 改进方法

为提高预测年度马尔科夫预测修正值的精度,马尔科夫预测修正值与原预测值、实际值具有以下关系:

$$|S_{\text{实际}} - S_{\text{修正}}| < |S_{\text{实际}} - S_{\text{预测}}| \quad (7)$$

式中: $S_{\text{实际}}$ ——实际铁路客运量。

将式(6)代入式(7)可得:

$$\left| S_{\text{实际}} - \frac{2S_{\text{预测}}}{2 + a_i + b_i} \right| < |S_{\text{实际}} - S_{\text{预测}}| \quad (8)$$

当  $S_{\text{实际}} > \frac{2S_{\text{预测}}}{2 + a_i + b_i}$  时,有:

$$a_i + b_i > \frac{2S_{\text{预测}}}{S_{\text{实际}}} - 2 \quad (9)$$

同时有  $S_{\text{实际}} - \frac{2S_{\text{预测}}}{2 + a_i + b_i} < |S_{\text{实际}} - S_{\text{预测}}|$ , 求解可得:

$$a_i + b_i < \frac{2S_{\text{预测}}}{S_{\text{实际}} - |S_{\text{实际}} - S_{\text{预测}}|} - 2 \quad (10)$$

整理可得状态划分区间取值范围为:

$$\frac{2S_{\text{预测}}}{S_{\text{实际}}} - 2 < a_i + b_i < \frac{2S_{\text{预测}}}{S_{\text{实际}} - |S_{\text{实际}} - S_{\text{预测}}|} - 2 \quad (11)$$

当  $S_{\text{实际}} < \frac{2S_{\text{预测}}}{2 + a_i + b_i}$  时,有:

$$a_i + b_i < \frac{2S_{\text{预测}}}{S_{\text{实际}}} - 2 \quad (12)$$

同理,求解可得状态划分区间的取值范围:

$$\frac{2S_{\text{预测}}}{S_{\text{实际}} + |S_{\text{实际}} - S_{\text{预测}}|} - 2 < a_i + b_i < \frac{2S_{\text{预测}}}{S_{\text{实际}}} - 2 \quad (13)$$

式(11)、式(13)为划分的状态区间取值与铁路客运量预测值和实际值的关系,当满足其一时,可进一步提高马尔科夫预测修正值的精度。

## 2.2 预测过程

根据划分状态区间的取值范围约束,对马尔科夫预测过程进行优化,如图1所示。

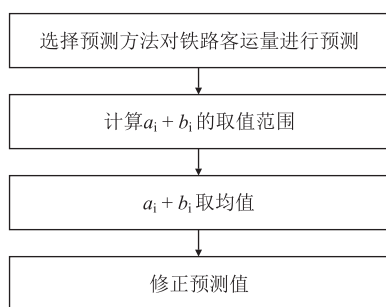


图1 马尔科夫预测优化过程图

该方法是根据式(11)或式(13)先计算往年的客运量预测误差序列  $S(t)$  中每一组数据对应的  $a_i + b_i$  的取值范围  $[\alpha_i, \beta_i]$ , 将每组数据取中值, 即  $(\alpha_i + \beta_i)/2$ , 再取其平均值带入式(6)对预测年度的预测值进行修正。此法打破传统马尔科夫预测的流程和模式, 无需

计算  $k$  步状态转移概率矩阵, 解决了状态划分方法优化难度大、状态转移概率矩阵计算量大等问题, 其误差精度的优劣是本文论证研究的重点。

## 3 实例验证

### 3.1 多层感知器神经网络的铁路客运量预测

影响铁路客运量预测的因素<sup>[10]</sup>可分为宏观因素和微观因素两类。宏观因素包括经济实力、人口规模、社会发展水平、交通建设情况、旅游业发展水平、国家政策等; 微观因素包括铁路运输设施设备属性和旅客属性两类, 主要有运输时间、费用、服务质量、出行目的、出行距离、出行偏好等。考虑北京市铁路客运量的特点及指标数据获取的可操作性, 本文主要考虑地区生产总值、地区常住人口、人均消费水平、旅游人数对铁路客运量预测的影响。通过北京市2020年统计年鉴获取相关数据, 借助SPSS软件构造其多层感知器神经网络预测模型, 如图2所示。其中, 隐藏层数设为1层, 隐藏单元为1个, 隐藏层激活函数为双曲正切函数。

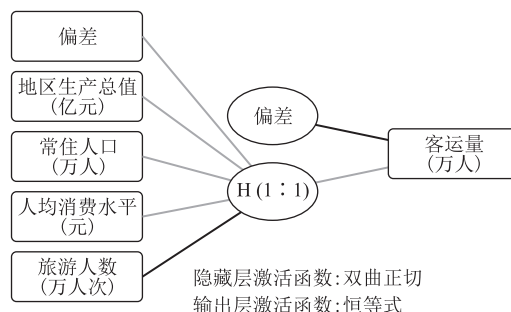


图2 北京市铁路客运量多层感知器神经网络预测模型图

借助SPSS软件预测北京市2004—2019年铁路客运量, 预测残差如图3所示, 预测结果如表1所示。

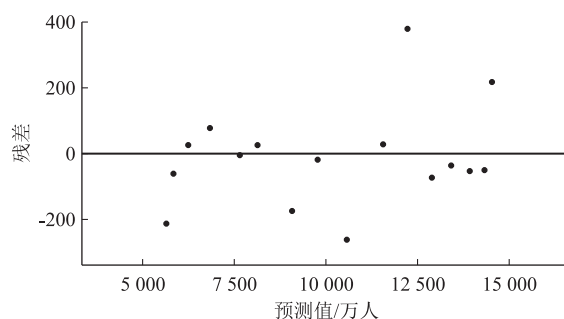


图3 北京市铁路客运量多层感知器神经网络预测残差图

由图3可知, 部分多层感知器神经网络预测值与真实值存在一定的差异, 可结合马尔科夫模型对预测

表 1 北京市铁路客运量预测结果表			
年份	实际客运量/万人	预测值/万人	相对误差/%
2004 年	5 437	5 648	- 3. 881
2005 年	5 779	5 840	- 1. 056
2006 年	6 269	6 243	0. 415
2007 年	6 915	6 837	1. 128
2008 年	7 644	7 649	- 0. 065
2009 年	8 161	8 135	0. 319
2010 年	8 903	9 078	- 1. 966
2011 年	9 755	9 773	- 0. 185
2012 年	10 315	10 577	- 2. 540
2013 年	11 588	11 559	0. 250
2014 年	12 609	12 230	3. 006
2015 年	12 821	12 894	- 0. 569
2016 年	13 380	13 416	- 0. 269
2017 年	13 873	13 926	- 0. 382
2018 年	14 273	14 323	- 0. 350
2019 年	14 755	14 537	1. 477

值进行进一步修正,以提高预测精度。

3.2 马尔科夫修正

为了对比常用的均等划分、均值-方差法划分误差状态区间的马尔科夫预测精度以及本文提出的优化马尔科夫预测过程法的预测精度,将 2004—2016 年北京市铁路客运量实际值和多层感知器神经网络预测值视为研究对象,研究其状态区间划分及状态转移规律,并视 2017—2019 年为预测年度,对其铁路客运量多层感知器神经网络的预测值进行修正计算。

(1) 均等划分法

由表 1 可知,2004—2016 年北京市铁路客运量预测误差范围为 - 3. 881% ~ 3. 006%,将误差序列平均划分为  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$ 、 $E_4$ 、 $E_5$  共 5 个状态,则每个状态区间长度均为 1. 377%。因此,各状态区间取值为: $E_1 \in [- 3. 881\%, - 2. 504\% )$ 、 $E_2 \in [- 2. 504\%, - 1. 126\% )$ 、 $E_3 \in [- 1. 126\%, 0. 251\% )$ 、 $E_4 \in [0. 251\%, 1. 629\% )$  和  $E_5 \in [1. 629\%, 3. 006\% ]$ 。

将 2004—2016 年多层感知器神经网络预测的误差按照状态区间划分结果进行分类,根据马尔科夫过程,状态  $E_i$  经过一步转移到状态  $E_j$  的频数,如表 2 所示。

表 2 均等划分法的状态转移频数表						
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	合计
$E_1$	0	0	2	0	0	2
$E_2$	0	0	1	0	0	1
$E_3$	1	0	1	2	1	5
$E_4$	0	1	1	1	0	3
$E_5$	0	0	1	0	0	1

由表 2 和式(1)~式(3)计算得 2016 年铁路客运量预测误差状态的一步、两步和三步状态转移概率矩阵分别为:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.333 & 0.333 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.04 & 0.133 & 0.573 & 0.123 & 0.04 \\ 0.067 & 0.111 & 0.511 & 0.244 & 0.067 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.115 & 0.071 & 0.399 & 0.3 & 0.115 \\ 0.115 & 0.071 & 0.399 & 0.3 & 0.115 \\ 0.08 & 0.1 & 0.48 & 0.26 & 0.08 \\ 0.086 & 0.095 & 0.467 & 0.267 & 0.086 \\ 0.115 & 0.071 & 0.399 & 0.3 & 0.115 \end{pmatrix} \quad (16)$$

2016 年北京市铁路客运量预测误差所处状态为  $E_3$ ,故其初始状态的概率向量为  $P(0) = (0\ 0\ 1\ 0\ 0)$ ,根据式(5)计算可得 2017—2019 年状态转移概率向量分别为:

$$\begin{aligned} P(1) &= (0.2\ 0\ 0.2\ 0.4\ 0.2) \\ P(2) &= (0.04\ 0.133\ 0.573\ 0.123\ 0.04) \\ P(3) &= (0.08\ 0.1\ 0.48\ 0.26\ 0.08) \end{aligned} \quad (17)$$

可知 2017—2019 年预测误差最有可能所处的状态分别为  $E_4$ 、 $E_3$ 、 $E_3$ ,概率分别为 0. 4、0. 573、0. 48。根据式(6)计算得其预测修正值,如表 3 所示。

表 3 均等划分法的马尔科夫预测修正结果表					
年份	实际值/万人	神经网络预测值/万人	神经网络预测值误差/%	预测修正值/万人	预测修正值误差/%
2017 年	13 873	13 926	- 0. 382	13 796	0. 553
2018 年	14 273	14 323	- 0. 350	14 386	- 0. 791
2019 年	14 755	14 537	1. 477	14 601	1. 045

由表 3 可知,采用均等划分法对误差状态区间进行划分时,2019 年的马尔科夫预测修正值的误差比多层感知器神经网络预测更小,这表明马尔科夫模型在一定程度上能够提高预测精度。然而,2017 年、2018 年的马尔科夫预测修正值的误差绝对值更大,这是因为状态区间划分时未考虑误差精度的影响,确定的误差状态数和区间取值具有一定的主观性和随机性,影响马尔科夫预测修正值的整体精度。

(2) 均值-方差法



均值-方差法将预测误差分为5组,其变化区间计算公式为:

$$(-\infty, \bar{X} - \alpha_1 s) \tag{18}$$

$$[\bar{X} - \alpha_1 s, \bar{X} - \alpha_2 s) \tag{19}$$

$$[\bar{X} - \alpha_2 s, \bar{X} + \alpha_2 s) \tag{20}$$

$$[\bar{X} + \alpha_2 s, \bar{X} + \alpha_1 s) \tag{21}$$

$$[\bar{X} + \alpha_1 s, \infty) \tag{22}$$

式中: $\bar{X}$ ——预测值误差平均值;  
 $s$ ——预测误差方差。

$\alpha_1$ 取1.1, $\alpha_2$ 取0.5。其余计算过程同均等划分法,均值-方差法的马尔科夫模型对铁路客运量进行预测修正的结果如表4所示。

表4 均值-方差法的马尔科夫预测修正结果表

年份	实际值 /万人	神经网络 预测值 /万人	神经网络 预测值误差 /%	预测修正 值/万人	预测修正 值误差/%
2017年	13 873	13 926	-0.382	13 984	-0.799
2018年	14 273	14 323	-0.350	14 383	-0.767
2019年	14 755	14 537	1.477	14 597	1.068

由表4可知,均值-方差法的状态区间划分时也未考虑误差精度的影响,其2017年、2018年的马尔科夫预测修正值的误差绝对值更大,影响马尔科夫预测修正的整体精度。

(3) 优化马尔科夫预测过程法

根据式(13)计算得2004—2016年北京市铁路客运量预测误差状态区间的 $a_i + b_i$ 取值范围,如表5所示。

表5  $a_i + b_i$ 取值范围表

年份	取值范围	中值
2004年	[0, 0.078]	0.039
2005年	[0, 0.021]	0.011
2006年	[-0.017, -0.008]	-0.012
2007年	[-0.045, -0.023]	-0.034
2008年	[0, 0.001]	0.001
2009年	[-0.013, -0.006]	-0.010
2010年	[0, 0.039]	0.020
2011年	[0, 0.004]	0.002
2012年	[0, 0.051]	0.025
2013年	[-0.010, -0.005]	-0.007
2014年	[-0.117, -0.060]	-0.088
2015年	[0, 0.011]	0.006
2016年	[0, 0.005]	0.003

由表1、表5可知,当实际值大于预测值时,相应年份 $a_i + b_i$ 取值范围中值的平均值为-0.03;实际值小于预测值时,相应年份 $a_i + b_i$ 取值范围中值的平均

值为0.013。计算可知2017年与2018年的 $a_i + b_i$ 取0.013,2019年的 $a_i + b_i$ 取-0.03时预测精度最好,由式(6)计算可得2017—2019年铁路客运量预测修正值如表6所示。

表6 优化马尔科夫预测过程法的预测修正结果表

年份	实际值 /万人	神经网络 预测值 /万人	神经网络预 测值误差 /%	预测修正 值/万人	预测修正 值误差/%
2017年	13 873	13 926	-0.382	13 836	0.266
2018年	14 273	14 323	-0.350	14 231	0.298
2019年	14 755	14 537	1.477	14 758	-0.023

由表6可知,本文提出的优化马尔科夫预测过程法进行预测值修正时,其预测修正值的误差绝对值均小于多层感知器神经网络预测值的误差,优化模型的精度较好。

综上所述,各预测方法预测误差绝对值的均值如图4所示。

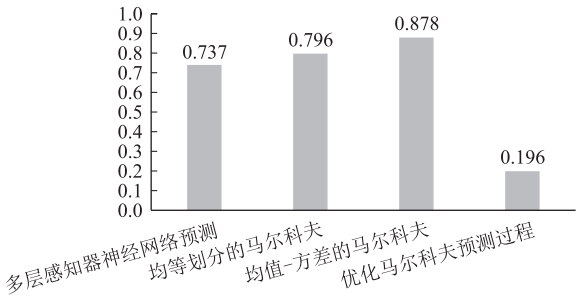


图4 各预测方法误差对比图(%)

由图4可知:

①均等划分和均值-方差法划分的状态区间取值受到划分方法和划分状态数量的影响,具有一定的主观性和随机性,无法保证每一组预测修正值的误差精度较原预测结果有所提升,导致马尔科夫预测修正值的平均误差较多层感知器神经网络的预测误差更大。

②本文考虑误差精度而改进的马尔科夫预测过程法的精度更佳,其误差比均等划分和均值-方差的马尔科夫预测方法分别降低了0.601%、0.683%,比多层感知器神经网络预测误差降低了0.541%,且无需计算 $k$ 步状态概率转移矩阵,降低了预测过程的复杂性。

4 结论

马尔科夫预测模型一定程度上能提高铁路客运量预测的精度,但其状态划分方法及状态数量的选择具有一定的主观性和随机性,导致模型的预测精度存

在不确定性。为解决这一问题,本文在考虑误差精度的条件下,对划分状态区间的取值范围进行了研究,得到的主要结论如下:

(1)考虑误差精度更优条件下确定马尔科夫模型划分状态区间取值范围对解决马尔科夫预测精度的不确定性问题具有重要意义,能有效保证马尔科夫对预测值进行改进的效果。

(2)改进的马尔科夫模型无需计算 $k$ 步状态转移概率矩阵,降低了预测过程的复杂性。

(3)相比于多层感知器神经网络、均等划分的马尔科夫模型、均值-方差的马尔科夫模型,改进的马尔科夫模型具有更高的预测精度。

未来的研究仍需重点关注考虑误差精度后状态区间划分方法的优化,以进一步提高马尔科夫模型的预测精度。

## 参考文献:

- [1] 姜永杰,张书豪,吴光,等. 基于灰色系统及BP神经网络算法的边坡变形预测精确度影响分析[J]. 高速铁路技术,2020,11(5): 13-19.  
JIANG Yongjie, ZHANG Shuhao, WU Guang, et al. Influence Analysis of Slope Deformation Prediction Accuracy Based on Grey System and BP Neural Network Algorithm [J]. High Speed Railway Technology, 2020, 11(5): 13-19.
- [2] 吕鹏飞,庄元,李洋,等. 船舶交通量的BP神经网络-马尔科夫预测模型[J]. 上海海事大学学报,2017,38(2): 17-21, 28.  
LV Pengfei, ZHUANG Yuan, LI Yang, et al. BP Neural Network Combined with Markov Prediction Model of Ship Traffic Flow [J]. Journal of Shanghai Maritime University, 2017, 38(2): 17-21, 28.
- [3] 裴同松,裴彧. 基于马尔科夫链-BP神经网络模型对公路运量的预测研究[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版),2021,40(2): 35-41.  
PEI Tongsong, PEI Yu. Prediction of Highway Traffic Volume Based on Markov Chain-BP Neural Network Model [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science), 2021, 40(2): 35-41.
- [4] 尚庆松,石庆升,崔炳谋. 基于灰色-马尔科夫预测模型的售票窗口客流量预测研究[J]. 铁道运输与经济,2019,41(1): 85-89.  
SHANG Qingsong, SHI Qingsheng, CUI Bingmou. A Study on Passenger Volume Forecast at the Ticketing Counter Based on Gray-Markov Forecast Model [J]. Railway Transport and Economy, 2019, 41(1): 85-89.
- [5] 周子东,郑东健,蒋明,等. 偏最小二乘-马尔科夫模型在大坝位移预测中的应用[J]. 三峡大学学报(自然科学版),2015,37(3): 15-18.  
ZHOU Zidong, ZHENG Dongjian, JIANG Ming, et al. Application of PLS-Markov Model to Dam Displacement Prediction [J]. Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences), 2015, 37(3): 15-18.
- [6] 马彩雯,王晓明. 背景值优化的灰色马尔科夫模型在铁路客流预测中的应用[J]. 大连交通大学学报,2019,40(1): 18-21.  
MA Caiwen, WANG Xiaoming. Application of Grey Markov Model with Background Value Optimization in Railway Passenger Flow Prediction [J]. Journal of Dalian Jiaotong University, 2019, 40(1): 18-21.
- [7] 潘丽,李林. 基于灰色马尔科夫模型的上海铁路客运量预测[J]. 物流科技,2019,42(3): 99-102.  
PAN Li, LI Lin. Passenger Traffic Forecast of Shanghai Railway Based on Grey Markov Model [J]. Logistics Sci-Tech, 2019, 42(3): 99-102.
- [8] 何启,戴波. 基于灰色神经网络-加权马尔可夫链的大坝变形监控模型及预报研究[J]. 中国农村水利水电,2016(10): 146-150, 155.  
HE Qi, DAI Bo. Dam Deformation Monitoring Model Based on Gray Neural Network-weighted Markov Chain and Prediction Research [J]. China Rural Water and Hydropower, 2016(10): 146-150, 155.
- [9] 刘军凯,崔振新. 基于灰色新陈代谢马尔科夫模型对跑道侵入事件的分析及预测[J]. 综合运输,2016,38(3): 62-65.  
LIU Junkai, CUI Zhenxin. Analysis and Prediction of Runway Incursion Events Based on Grey Metabolism Markov Model [J]. China Transportation Review, 2016, 38(3): 62-65.
- [10] 南敬林. 铁路客运量预测影响因素分析[J]. 综合运输,2016,38(2): 35-40.  
NAN Jinglin. The Analysis of Influencing Factor about Railway Passenger Forecast [J]. China Transportation Review, 2016, 38(2): 35-40.